PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

$f(t)$ y $g(t)$ señales, con $\sim$ y constantes, $F(w)=\mathfrak{F}\{f(t)\}$ y $G(w)=\mathfrak{F}\{g(t)\}$ transformadas de Fourier de $f(t)$ y $g(t)$ respectivamente

PROPIEDAD	SEÑAL APERIODICA	TRANSFORMADA
Linealidad	$\sim f(t)+\quad g(t)$	$\sim F(w)+\quad G(w)$
Desplazamiento en el tiempo	$f(t-t_0)\quad t_0\geq 0$	$e^{-jwt_0}F(w)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{jw_0t}f(t)\quad w_0\in \mathrm{IC}$	$F(w-w_0)$
	$e^{jw_0t}f(a\,t)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{w-w_0}{a}\right)$
Conjugación	$\overline{f}(t)$	$\overline{F}(-w)$
Inversión en el tiempo	$f(-t)$	$F(-w)$ $F(-w)=\overline{F}(w)$
Escalamiento en el tiempo	$f(at)\quad a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{w}{a}\right)$
Convolucion	$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\text{ª})\,g(t-\text{ª})\,d\text{ª}$	$F(w)G(w)$
	$F(t)*G(t)$	$2\text{®}\left[f(w)g(w)\right]$
Multiplicación	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\text{®}}\left[F(w)*G(w)\right]=\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\text{ª})G(w-\text{ª})d\text{ª}$
Diferenciación en el tiempo	$f'(t)=\frac{d\,f(t)}{dt}$	$(jw)F(w)$
	$f^{(n)}(t)$	$(jw)^n F(w)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} f(\text{²})\,d\text{²}$	$\frac{1}{jw}F(w)+\text{®}F(0)\text{¢}(w)$
Diferenciación en frecuencia	$tf(t)$	$j\frac{d}{dw}F(w)$
	$-jt\,f(t)$	$F'(w)$
	$(-jt)^n f(t)$	$F^{(n)}(w)$
	$t^n f(t)$	$j^nF^{(n)}(w)$
Simetría	$f(t)=f_P(t)+f_I(t)$	$F(w)(t)=\mathrm{Re}(w)+j\,\mathrm{Im}(w)$
Simetría conjugada para señales reales	$f(t)\in \mathrm{IR}$	$\begin{cases}F(w)=\overline{F}(w)\\ \mathrm{Re}\left[F(w)\right]=\mathrm{Re}\left[F(-w)\right]\\ \mathrm{Im}\left[F(w)\right]=-\mathrm{Im}\left[F(-w)\right]\end{cases}$ $\begin{cases}\lvert F(w)\rvert=\lvert F(-w)\rvert\\ \text{¤}(w)=-\text{¤}(-w)\end{cases}$
Simetría para señal real y par	$f(t)\in \mathrm{IR}$ y par $f_P(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$	$F(w)=\mathrm{Re}(w)=\begin{cases}\lvert F(w)\rvert=\lvert\mathrm{Re}(w)\rvert\\ \text{¤}(w)=\begin{cases}0\\ \pm\text{®}\end{cases}\end{cases}$ y par

PROPIEDAD	SEÑAL APERIODICA	TRANSFORMADA
Simetría para señal real e impar	$f(t) \in \mathrm{IR}$ e impar $f_I(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t) \right]$	$F(w) = j\,\mathrm{Im}(w) = \begin{cases} \lvert F(w) \rvert = \lvert \mathrm{Im}(w) \rvert \\ \text{¤}(w) = \pm \frac{\text{®}}{2} \end{cases}$ e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$f_P(t) \in \mathrm{IR}$ $f_\mathrm{I}(t) \in \mathrm{IR}$	$\mathrm{Re}\left[F(w) \right] = \mathrm{Re}(w)$ $j\,\mathrm{Im}\left[F(w) \right] = j\,\mathrm{Im}(w)$
Dualidad	$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}\{f(t)\}} F(w) \quad \Rightarrow \quad F(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}\{F(t)\}} 2\text{®}\, f(-w)$	

NOMBRE	PROPIEDAD
Teorema de Parseval	$\frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t) \rvert^2 dt = \frac{1}{2\text{®}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w) \rvert^2 dw$
Igualdad Auxiliar	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{2\text{®}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, G(w)\, dw$
	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, G(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, g(t)\, dt$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

a, b y z constantes

SEÑAL		TRANSFORMADA
$f(t)$		$F(w)=\mathfrak{F}\{f(t)\}=$
$\Pi_{[a,b]}(t)=1$ $a\le t\le b$	$\Pi_{[a,b]}(t)$	$\frac{1}{jw}\left[e^{-ajw}-e^{-bjw}\right]$
	$\Pi_{[-a,a]}(t)$	$\frac{1}{jw}\left[e^{ajw}-e^{-ajw}\right]=2\frac{sen(aw)}{w}$
	$e^{zt}\Pi_{[a,b]}(t)\quad \mathrm{Re}(z)<0$	$\frac{1}{z-jw}\left[e^{b(z-jw)}-e^{a(z-jw)}\right]$
	$\Pi_{[0,\infty]}(t)$	$\frac{1}{jw}$
	$e^{zt}\Pi_{[0,\infty]}(t)\quad \mathrm{Re}(z)<0$	$\frac{1}{jw-z}$
	$t^n e^{zt}\Pi_{[0,\infty]}(t)\quad \mathrm{Re}(z)<0$	$\frac{n!}{(jw-z)^{n+1}}$
PULSOS	$A\,\Pi\left(\frac{t}{²}\right)=A\,rect\left(\frac{t}{²}\right)$ (² ancho del pulso)	$\frac{2A}{w}sen\left(w\frac{²}{2}\right)=A²\;Sa\left(\frac{w²}{2}\right)=A²\sin c\left(\frac{w²}{2®}\right)$
	$rect(t)$	$\sin c\left(\frac{w}{2®}\right)$
	$AP_{\Delta}\left(\frac{t}{2²}\right)$ (2² ancho del pulso)	$A²\;Sa^2\left(\frac{w²}{2}\right)=A²\sin c^2\left(\frac{w²}{2®}\right)$
	$tri(t)$	$Sa^2\left(\frac{w}{2}\right)$
SEÑAL		**TRANSFORMADA**
	$A\cos(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2²}\right)$	$\frac{A®\cos(w²)}{²\left[\left(\frac{®}{2²}\right)^2-w^2\right]}$
FUNCIONES GENERALES	$F\left[f(t)\right]$	$\frac{1}{2®}f(-t)$
	$f(t)sen(w_0t)$	$\frac{1}{2j}\left[F(w-w_0)-F(w+w_0)\right]$
	$f(t)\cos(w_0t)$	$\frac{1}{2}\left[F(w-w_0)+F(w+w_0)\right]$
FUNCIONES EXPONENCIALES Y TRIGONOMETRICAS	$e^{\pm a\|t\|}$	$\frac{\mp 2a}{w^2\mp a^2}$
	$e^{\pm jw_0t}$	$2®¢(w\mp w_0)$
	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{®}{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$
	$e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$	$a\sqrt{2®}\,e^{-\frac{a^2w^2}{2}}$
	$sen(w_0t)$	$-j®\left[¢(w-w_0)+¢(w+w_0)\right]$
	$sen(w_0t+¯)$	$-j®\left[e^{j¯}¢(w-w_0)+e^{-j¯}¢(w+w_0)\right]$
	$\cos(w_0t)$	$®\left[¢(w-w_0)+¢(w+w_0)\right]$

	$\cos\left(w_0 t + ¯\right)$	$®\left[e^{j¯}¢\left(w-w_0\right)+e^{-j¯}¢\left(w+w_0\right)\right]$
	$\dfrac{sen\left(w_0 t\right)}{®t}$	$P\left(\dfrac{t}{2w_0}\right) \quad \vee \quad \begin{cases}1 & \lvert w\rvert \le w_0 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$
FUNCIONES RACIONALES	$\dfrac{1}{t^2+a^2} \quad \operatorname{Re}(a)<0$	$\frac{®}{a}e^{-a\lvert w\rvert}$
	$\dfrac{1}{\left(t^2+a^2\right)^2} \quad \operatorname{Re}(a)<0$	$\frac{j®w}{2a}e^{a\lvert w\rvert}$
	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$	$-\frac{®jw}{a}e^{-a\lvert w\rvert}$
	$\dfrac{e^{jat}}{t^2+z^2} \quad \operatorname{Re}(z)<0$	$-\frac{®}{2}e^{z\lvert w-a\rvert}$
	$\dfrac{\cos(bt)}{t^2+a^2} \quad \operatorname{Re}(a)<0$	$-\frac{®}{2a}\left[e^{-a\lvert w-b\rvert}+e^{-a\lvert w+b\rvert}\right]$
	$\dfrac{sen(bt)}{t^2+a^2} \quad \operatorname{Re}(a)<0$	$\frac{®}{2aj}\left[e^{-a\lvert w-b\rvert}-e^{-a\lvert w+b\rvert}\right]$

SEÑAL		TRANSFORMADA
FUNCIONES ELEMENTALES	A	$2®A¢(w)$
	t	$2®j¢'(w)$
	t^n	$2®j^n¢^{(n)}(w)$
	$\dfrac{1}{t}$	$j®-2j®\;u(w)$
	$\frac{1}{t^n}$	$\frac{(-jw)^{n-1}}{(n-1)!}\left[j®-2j®u(w)\right]$
	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{®}{2a}}$
	$j\frac{1}{®t}$	$\operatorname{sgn}(w)$
FUNCIONES SINGULARES	$\frac{A}{2®}Sa\left(\frac{At}{2}\right)$	$rect\left(\frac{w}{A}\right)=P\left(\frac{w}{²}\right)$
	$\frac{²}{2®}Sa^2\left(\frac{²t}{2}\right)$	$P_\Delta\left(\frac{w}{²}\right)$
	$\sin c(t)=\dfrac{sen(®t)}{®t}$	$rect\left(\frac{w}{2®}\right)$
	$\left(1-\dfrac{2\lvert t\rvert}{²}\right)P\left(\frac{t}{²}\right)$	$\frac{²}{2}\sin c^2\left(\frac{²w}{4®}\right)$

	$2\ \sin c\left(\frac{2t}{2\text{®}}\right)$	$2\text{®}\, P(w)$	
	$\frac{2}{2\text{®}}\sin c^2\left(\frac{2t}{2}\right)$	$P_\Delta\left(\frac{w2}{4}\right)$	
	$\frac{2}{2}\sin c^2\left(\frac{2t}{4\text{®}}\right)$	$2\text{®}\left(1-\frac{2\lvert w\rvert}{2}\right)P\left(\frac{w}{2}\right)$	
FUNCIÓN IMPULSO	$\text{¢}(t)$	1	
	$\text{¢}(t-t_0)$	e^{-jwt_0}	
	$\text{¢}'(t)$	jw	
	$\text{¢}^{(n)}(t)$	$(jw)^n$	
FUNCIÓN SIGNO Y ESCALÓN UNITARIO	$\operatorname{sgn}(t)=\frac{t}{\lvert t\rvert}$	$\frac{2}{jw}$	
	$u(t)$	$\text{®¢}(w)+\frac{1}{jw}$	$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{jw}\right\}=u(t)$
	$-0.5+u(t)$	$\frac{1}{jw}$	
	$u(t-t_0)$	$\text{®¢}(w)+\frac{1}{jw}e^{-jwt_0}$	
	$r(t)=t\ u(t)$	$j\text{®¢}'(w)-\frac{1}{w^2}$	$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(jw)^2}\right\}=t\ u(t)$
	$e^{-at}u(t)\quad \operatorname{Re}(a)>0$	$\frac{1}{a+jw}$	
	$te^{-at}u(t)\quad \operatorname{Re}(a)>0$	$\frac{1}{(a+jw)^2}$	
	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\quad \operatorname{Re}(a)>0$	$\frac{1}{(a+jw)^n}$	
	$e^{-at}sen(bt)u(t)$	$\frac{b}{(a+jw)^2+b^2}$	
	$e^{-at}\cos(bt)u(t)$	$\frac{jw+a}{(a+jw)^2+b^2}$	
	$sen(w_0t)u(t)$	$\frac{jw}{w^2-w_0^2}+\frac{\text{®}}{2j}\left[\text{¢}(w-w_0)-\text{¢}(w+w_0)\right]$	
	$\cos(w_0t)u(t)$	$\frac{w_0}{w^2-w_0^2}+\frac{\text{®}}{2}\left[\text{¢}(w-w_0)+\text{¢}(w+w_0)\right]$	
PERIÓDICAS	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{¢}(t-nT)$	$w_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{¢}(w-kw_0)\quad w_0=\frac{2\text{®}}{T}$ $w_0\text{¢}_{w_0}(w)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{¢}(w-nw_0)$	

	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_0 t}$	$2® \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n ¢\left(w-nw_0\right)$
	$\begin{cases} 1 & \lvert t\rvert \le T \\ 0 & T<\lvert t\rvert<\frac{T}{2} \end{cases} \quad f(t)=f(t+T)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2sen\left(nw_0T\right)}{n} ¢\left(w-nw_0\right)$

TABLA DE PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA FOURIER (2)

SEÑAL	TRANSFORMADA	SEÑAL	TRANSFORMADA
$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(f)+bX_2(f)$	$\frac{d}{dt}x(t)$	$(j2® f)X(f)$
$x(t\pm t_0)$	$X(f)e^{\pm j2® t_0 f}$	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j2® f)^n X(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$	$tx(t)$	$\frac{1}{(-j2®)}\frac{d}{df}X(f)$
$X(t)$	$x(-f)$	$t^n x(t)$	$\frac{1}{(-j2®)^n}\frac{d^n}{df^n}X(f)$
$x(t)\cos(2® f_c t)$	$\frac{1}{2}\left[X(f+f_c)+X(f-f_c)\right]$	$\frac{1}{t}x(t)$	$-j2® \int_{-\infty}^{f} X(²)d²$
$x(t)sen(2® f_c t)$	$\frac{j}{2}\left[X(f+f_c)-X(f-f_c)\right]$	$\int_{-\infty}^{t} x(²)d²$	$\frac{X(f)}{j2® f}+\frac{X(0)}{2}¢(f)$
$\overline{x}(t)\in \mathrm{IC}$	$\overline{X}(-f)$	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	$\overline{X}_1(f)X_2(f)$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER (2)

SEÑAL	TRANSFORMADA	SEÑAL	TRANSFORMADA
$AP\left(\frac{t}{²}\right)$	$A² \sin c(² f)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} ¢(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} ¢\left(f-\frac{n}{T}\right)$
$AP_{\Delta}\left(\frac{t}{²}\right)$	$A² \sin c^2(² f)$	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j® f}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2® f}$	$u(t)$	$\frac{¢(f)}{2}+\frac{1}{j2® f}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+4®^2 f^2}$	$r(t)$	$\frac{1}{(j2® f)^2}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j2® f)}$	$¢(t)$	1
$e^{j(2® f_c t\pm ¤)}$	$¢(f\mp f_c)e^{j¤}$	$e^{-® t^2}$	$e^{-® f^2}$
1	$¢(f)$	$¢(t\pm t_0)$	$e^{\pm j2® t_0 f}$
$\cos(2® f_c t+¤)$	$\frac{1}{2}\left[¢(f+f_c)e^{-j¤}+¢(f-f_c)e^{j¤}\right]$	$2tP\left(\frac{t}{1}\right)$	$\frac{\cos(® f)}{® f}-\frac{sen(® f)}{(® f)^2}$
$sen(2® f_c t+¤)$	$\frac{j}{2}\left[¢(f+f_c)e^{-j¤}-¢(f-f_c)e^{j¤}\right]$	$\hat{x}(t)$	$-j\,\mathrm{sgn}(f)X(f)$